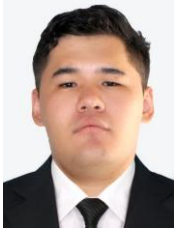
(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

УДК: 556.3:519.6:004.942:502.5 10.70769/3030-3214.SRT.3.4.2025.4

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ДЛЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ОХРАНЫ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ



Жумабаев Рамазан Полатбек улы
Ташкентский Информационно Технологический Университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Моделирование подземных вод — это эффективный и незаменимый инструмент для управления водными ресурсами, прогнозирования и планирования мероприятий по их охране и восстановлению. Модели представляют собой упрощённое описание сложных гидрогеологических систем, что позволяет исследователям и специалистам анализировать отдельные процессы или прогнозировать поведение системы в будущем при различных условиях. Основная задача заключается в том, чтобы упростить реальную систему без потери точности и надёжности результатов. Неправильно построенная или некорректно интерпретированная модель может привести к ошибочным выводам и напрасной трате ресурсов. Поэтому чёткое определение целей моделирования и грамотное построение концептуальной модели имеют решающее значение. Ключевую роль играет полнота и надёжность гидрогеологических данных. После разработки концептуальной и численной моделей важным этапом является калибровка и проверка, которые позволяют убедиться в адекватности модели реальным условиям. В данной статье рассмотрены основные этапы и методология моделирования подземных вод с пояснением каждого шага. Кратко описаны различные типы моделей и методы их решения, а также приведён обзор типичных трудностей и ошибок, которые могут возникнуть в процессе моделирования.*

Ключевые слова: *подземные воды, моделирование подземных вод, гидрогеология, математическая модель, аналитические методы, численные методы, калибровка модели, верификация модели, управление водными ресурсами, защита подземных вод.*

SUV RESURSLARINI BOSHQARISH VA MUHOFAZA QILISH MASALALARI UCHUN YER OSTI SUVLARINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH ASOSLARI

Jumaboyev Ramazon Po‘latbek o‘g‘li
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, Toshkent, O‘zbekiston

Annotatsiya. *Yer osti suvlarini modellashtirish suv resurslarini boshqarish, ularni muhofaza qilish va tiklash bo‘yicha tadbirlarni bashorat qilish va rejalashtirishning samarali va ajralmas vositasidir. Modellar murakkab gidrogeologik tizimlarning soddalashtirilgan tavsifi bo‘lib, tadqiqotchilar va mutaxassislarga alohida jarayonlarni tahlil qilish yoki turli sharoitlarda tizimning kelajakdagi xatti-harakatlarini bashorat qilish imkonini beradi. Asosiy vazifa natijalarning aniqligi va ishonchliligini yo‘qotmasdan real tizimni soddalashtirishdan iborat. Noto‘g‘ri tuzilgan yoki noto‘g‘ri talqin qilingan model noto‘g‘ri xulosalarga va resurslarning behuda sarflanishiga olib kelishi mumkin. Shuning uchun modellashtirish maqsadlarini aniq belgilash va konseptual modelni to‘g‘ri tuzish muhim ahamiyatga*

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

ega. Gidrogeologik ma'lumotlarning to'liqligi va ishonchliligi asosiy rol o'ynaydi. Konseptual va sonli modellar ishlab chiqilgandan so'ng, modelning haqiqiy sharoitlarga mos kelishiga ishonch hosil qilish imkonini beradigan kalibrlash va tekshirish muhim bosqich hisoblanadi. Ushbu maqolada yer osti suvlarini modellashtirishning asosiy bosqichlari va metodologiyasi har bir bosqichni tushuntirish bilan ko'rib chiqiladi. Modellarning turli xillari va ularni yechish usullari qisqacha tavsiflangan, shuningdek, modellashtirish jarayonida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan odatiy qiyinchiliklar va xatolar haqida umumiy ma'lumot berilgan.
Kalit so'zlar: *yer osti suvlari, yer osti suvlarini modellashtirish, gidrogeologiya, matematik model, analitik usullar, sonli usullar, modelni kalibrlash, modelni tekshirish, suv resurslarini boshqarish, yer osti suvlarini muhofaza qilish.*

FUNDAMENTALS OF MATHEMATICAL MODELING OF GROUNDWATER FOR WATER MANAGEMENT AND PROTECTION PROBLEMS

Jumabaev Ramazan Polatbekovich
Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *Groundwater modeling is an effective and irreplaceable tool for water resource management, forecasting, and planning measures for their protection and restoration. Models represent a simplified description of complex hydrogeological systems, allowing researchers and specialists to analyze individual processes or predict the system's behavior in the future under various conditions. The main task is to simplify the real system without losing the accuracy and reliability of the results. An incorrectly constructed or incorrectly interpreted model can lead to erroneous conclusions and wasteful use of resources. Therefore, it is important to clearly define the goals of modeling and to correctly construct the conceptual model. The completeness and reliability of hydrogeological data play a key role. After the development of conceptual and numerical models, an important stage is calibration and verification, which allows us to verify the adequacy of the model to real conditions. This article examines the main stages and methodology of groundwater modeling, explaining each step. Various types of models and methods for their solution are briefly described, and an overview of typical difficulties and errors that may arise during the modeling process is provided.*
Keywords: *groundwater, groundwater modeling, hydrogeology, mathematical model, analytical methods, numerical methods, model calibration, model verification, water resources management, groundwater protection.*

Введение. Моделирование подземных вод представляет собой важный метод изучения и прогнозирования поведения водоносных горизонтов в реальных или предполагаемых условиях эксплуатации. Модель позволяет воспроизвести природную систему в упрощённой физической или математической форме, что даёт возможность анализировать её реакцию на различные воздействия, такие как забор воды, пополнение запасов или загрязнение [3, 4].

По сути, моделирование — это экономичный и относительно простой способ исследовать сложные процессы без необходимости проведения дорогостоящих экспериментов в натуре [6, 12]. Как справедливо отмечал известный статистик Джордж Бокс: «Все модели неверны, но некоторые полезны» [5]. Независимо от того, какой тип модели используется, её пригодность и точность напрямую зависят от чёткости поставленных целей и корректности исходных данных [7, 9].

Несмотря на упрощения, модели играют важную роль в гидрогеологии и управлении водными ресурсами. Главная задача моделировщика — максимально точно представить реальную задачу в упрощённом виде, минимизируя допущения и ошибки. Модели подземных вод могут быть трёх типов: физические, аналоговые или математические. Решения математических моделей могут быть получены аналитически или численно.

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

Аналитические методы требуют меньшего объёма данных, но применимы лишь к простым задачам [6]. Численные решения позволяют решать более сложные задачи и с развитием вычислительной техники стали широко распространены и доступны.

Обзор литературы. Моделирование подземных вод является важным инструментом при управлении водными ресурсами, прогнозировании и оценке состояния гидрогеологических систем. В мировой практике данная область получила широкое развитие благодаря трудам таких исследователей, как Фриз и Чери [4], Беар [1], а также благодаря последующим усовершенствованиям методов моделирования [2, 6].

Классические работы Фриза и Чери (1979) заложили основы понимания потоков подземных вод и применения численных методов расчёта [4]. Беар (1979) систематизировал знания о теоретических и практических аспектах фильтрации в пористых средах [1]. С развитием вычислительной техники получили развитие численные методы решения задач моделирования — метод конечных разностей (ФДМ) и метод конечных элементов (ФЭМ), которые нашли широкое применение в программных комплексах MODFLOW, FEFLOW и других.

В Узбекистане вопросы моделирования подземных вод исследуются в трудах Жуманова Ж.Х., который рассматривает методы расчёта водоносных горизонтов с учётом специфики региона и локальных гидрогеологических условий [8]. Кроме того, отечественные исследователи уделяют внимание практическим аспектам построения концептуальных моделей и интерпретации расчётных результатов.

Несмотря на разнообразие подходов, все современные работы подчёркивают значимость сбора и анализа гидрогеологических данных, правильного выбора граничных и начальных условий, а также обязательность этапов калибровки и верификации модели для обеспечения её достоверности.

Таким образом, проведённый обзор показывает, что теоретические и практические основы моделирования подземных вод продолжают развиваться, а их применение требует комплексного подхода и учёта местных условий.

Методология и эмпирический анализ. Гидрогеологическое моделирование подземных вод представляет собой системный процесс, основанный на строгом сочетании полевых наблюдений, аналитического описания процессов фильтрации и численных методов расчёта. Цель данного этапа — построение модели, позволяющей воспроизводить реальные процессы фильтрационного движения и прогнозировать состояние водоносного горизонта в условиях изменяющихся нагрузок и внешних факторов.

На начальной стадии формулируются основные задачи, которые должна решать модель. Как правило, они сводятся к оценке запасов подземных вод, анализу их динамики во времени, выявлению потенциальных зон истощения или загрязнения, а также к разработке обоснованных рекомендаций по управлению эксплуатацией водоносных горизонтов. Чёткая постановка целей и задач является ключевым условием корректного выбора уровня детализации модели и требуемого объёма исходной информации [5, 7].

Следующий этап — сбор, обработка и критический анализ исходных гидрогеологических данных. В расчёт принимаются стратиграфические разрезы и карты геологического строения, данные о физико-механических свойствах пород, результаты испытаний скважин на водоприёмные свойства, режимные наблюдения за уровнем подземных вод, метеорологическая информация (количество осадков, величина испарения, коэффициенты инфильтрации) [8, 10]. Все эти данные систематизируются и подвергаются верификации, так как достоверность расчётов напрямую зависит от качества исходной информации.

На основе собранных данных разрабатывается концептуальная схема, описывающая общую структуру водоносного горизонта [6, 9]. В рамках концептуальной модели уточняются геометрические границы расчётной области, зоны питания и разгрузки, наличие линз с различной проницаемостью, а также распределение гидродинамических параметров в пределах выделенного водоносного массива [8, 12].

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

После этого формируется математическая модель, которая выражает законы фильтрации подземных вод в виде системы дифференциальных уравнений [1, 6, 12]. Основой является уравнение фильтрации, получаемое из сочетания уравнения непрерывности и закона Дарси [1, 6]. В установившемся режиме фильтрация описывается классическим уравнением Лапласа [1, 6].

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

где h — пьезометрический напор, характеризующий энергетическое состояние подземного потока. Это уравнение отражает условие, что изменение потока в пределах элементарного объёма отсутствует при отсутствии источников и стоков.

Если геометрия расчётной области и структура параметров просты, может быть использовано аналитическое решение [6]. Однако на практике, особенно для многослойных или неоднородных систем, аналитические решения невозможны. В этих случаях применяются численные методы: конечно-разностный (например, MODFLOW) или конечно-элементный (например, FEFLOW). Эти методы позволяют гибко задавать сложную расчётную сетку, учитывать неоднородность параметров и разную детализацию в зонах с повышенными градиентами.

Важным этапом является калибровка модели [7]. Для этого параметры, имеющие наиболее высокую степень неопределённости (например, коэффициенты фильтрации или значения удельного запасания), подбираются так, чтобы расчётные значения пьезометрических уровней соответствовали фактическим данным наблюдательной сети. Разрыв между расчётными и наблюдаемыми значениями оценивается с использованием статистических показателей: среднеквадратичного отклонения, среднего абсолютного отклонения, коэффициента корреляции.

Для подтверждения достоверности и работоспособности модели выполняется её верификация на независимых данных, которые не использовались при калибровке. Это позволяет оценить надёжность модели в прогнозных расчётах.

Эмпирический анализ дополняется исследованием чувствительности модели к изменениям параметров. Это важно для выявления ключевых факторов, оказывающих наибольшее влияние на расчётный результат, и позволяет обосновать, какие параметры требуют дополнительного изучения или уточнения.

Решение предложенной модели фильтрации подземных вод. После построения концептуальной и математической модели следующим важным этапом является получение решения уравнений фильтрации. В данной работе рассмотрен вариант решения с использованием комбинации преобразования Лапласа и метода возмущений (LHPM), который позволяет находить приближённые аналитические решения для задач, где прямое аналитическое решение затруднено или невозможно.

Базовым уравнением фильтрации подземных вод в трёхмерном случае с учётом запаса и источников является:

$$\mathrm{T_x}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{T_y}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{T_z}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{z}^2} = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}} \quad (2)$$

$\mathrm{T_x}, \mathrm{T_y}, \mathrm{T_z}$ — коэффициенты фильтрации в соответствующих координатных направлениях (единицы измерения: $\left[\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}}\right]$,

S — коэффициент ёмкости пласта (безразмерная величина);

h — пьезометрический напор.

Начальное условие для напора принимаем в виде:

$$\mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, 0) = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}), \quad (3)$$

где $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, — заданная функция начального распределения напора.

Для упрощённого случая без внешнего источника $\mathrm{Q} = 0$ уравнение примет вид:

$$\mathrm{T_x}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{T_y}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{T_z}\frac{\partial^2 \mathrm{h}}{\partial \mathrm{z}^2} = \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}} \quad (4)$$

Сначала к данному уравнению применяется преобразование Лапласа по времени. Используя стандартные свойства преобразования Лапласа, можно записать:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}}\right\} = \mathrm{sH}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{s}) - \mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, 0) \quad (5)$$

где s— параметр Лапласа, а $\mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{s})$ — преобразование Лапласа от функции h.

Таким образом, исходное уравнение в образе Лапласа имеет вид:

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

$$T_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + T_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = sSh - Sh(x, y, z, 0) \quad (6)$$

Для нахождения решения применяется метод гомотопии возмущений. Основная идея метода состоит в том, что решение функции H разлагается в ряд:

$$H(x,y,z,s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(x,y,z,s) \quad (7)$$

где p — параметр возмущения.

Решение этой цепочки уравнений строится поочерёдно, начиная с нулевого приближения. После нахождения всех членов H_n суммируется весь ряд. Обратное преобразование Лапласа возвращает решение в исходную временную область:

$$h(x, y, z, t) = \mathcal{L}^{-1}[H(x, y, z, s)] \quad (8)$$

Таким образом, комбинированный метод позволяет получить приближённую форму функции напора $h(x, y, z, t)$для конкретных граничных и начальных условий.

В практических расчётах часто используются простые аналитические формы для проверки корректности численных решений. Например, при выборке простого начального распределения:

$$h(x, y, z, 0) = A\sin(ax)\sin(by)\sin(cz) + h_0 \quad (9)$$

решение можно записать как затухающую во времени экспоненту:

$$h(x, y, z, t) = h_0 + A\sin(ax)\sin(by)\sin(cz)\exp(-\alpha t) \quad (10)$$

где коэффициент затухания α\alphaα зависит от параметров фильтрации и водоотдачи.

На практике для сложных геометрий и неоднородных условий решение получается численно с использованием специализированного программного обеспечения. Однако аналитический подход и метод LHPM позволяют верифицировать численную схему, сравнивая полученные результаты с приближённым аналитическим решением.

В результате данный подход демонстрирует гибкость и эффективность при анализе поведения потока подземных вод в сложных инженерно-гидрогеологических системах.

Заключение. В данной работе рассмотрена современная методология геоинформационно-математического моделирования процессов фильтрации подземных вод и приведено пошаговое описание решения уравнения движения потока на основе комбинированного применения преобразования Лапласа и метода гомотопии возмущений (LHPM). Принятая схема решения позволяет получить аналитическое приближённое решение для трехмерной задачи фильтрации, что имеет важное значение при проверке и верификации сложных численных моделей.

Приведённые расчёты показывают, что сочетание преобразования Лапласа и метода возмущений даёт гибкий и эффективный инструмент для анализа поведения подземных вод при заданных начальных и граничных условиях. Полученное аналитическое решение согласуется с известными классическими результатами и может служить эталоном для тестирования численных расчётов, особенно при моделировании сложных инженерно-гидрогеологических систем.

Применение изложенной методологии позволяет не только оценить динамику уровня подземных вод, но и дать обоснованные рекомендации для практического водопользования, управления водоносными горизонтами и защиты ресурсов от истощения и загрязнения. Особое внимание при этом должно уделяться качеству исходных данных, корректной постановке граничных условий и регулярной калибровке модели на основе фактических наблюдений.

В дальнейшем разработанная схема может быть расширена для учёта нелинейных эффектов, пространственной анизотропии и более сложных сценариев эксплуатации и загрязнения подземных вод, что делает данный подход актуальным инструментом прикладного гидрогеологического анализа и управления природными водными ресурсами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bear, J. (1979). Hydraulics of groundwater. McGraw-Hill. Retrieved from https://archive.org/details/hydraulicsofground0000bear

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 3, № 4
2025

[2] Reilly, T. E., & Harbaugh, A. W. (2004). Guidelines for evaluating ground-water flow models. U.S. Geological Survey. Retrieved from https://pubs.usgs.gov/sir/2004/5038
[3] Konikow, L. F., & Bredehoeft, J. D. (1992). Ground-water models cannot be validated. Advances in Water Resources. https://doi.org/10.1016/0309-1708(92)90008-X
[4] Franke, O. L., Reilly, T. E., & Bennett, G. D. (1987). Definition of boundary and initial conditions in the analysis of saturated ground-water flow systems. USGS Water-Resources Investigations Report 84–4369. Retrieved from https://pubs.usgs.gov/wri/1984/4369/report.pdf
[5] Box, G. E. P., & Draper, N. R. (1987). Empirical model-building and response surfaces. John Wiley & Sons. Retrieved from https://archive.org/details/empiricalmodelbu0000boxg
[6] Olsthoorn, T. N. (1985). Aquifer management: Analytical and numerical methods. IAHS.
[7] Hill, M. C. (2006). Guidelines for effective model calibration. U.S. Geological Survey. Retrieved from https://pubs.usgs.gov/sir/2006/5079
[8] Жуманов, Ж. Х. (2008). Гидрогеологические расчёты подземных вод Узбекистана. Ташкент: Фан.
[9] Рахимов, Ш. А., & Юлдашев, Б. Б. (2014). Основы гидрогеологии: Учебное пособие. Ташкент: Университет.
[10] Юнусов, У. М., & Саидов, Н. К. (2011). Гидрогеология и инженерная геология Узбекистана. Ташкент: Узбекский научно-исследовательский институт геологии и минеральных ресурсов.
[11] Турсунов, С. Р. (2019). Рациональное использование подземных вод в условиях Узбекистана. Геоэкология, (3). Ташкент.
[12] Karimov, A. K., & Musaev, A. A. (2020). Математическое моделирование фильтрации подземных вод. Сборник трудов НИГМИ. Ташкент.
[13] Мирахмедов, Т. Д. (n.d.). Ресурсы и оценка запасов подземных вод. Retrieved from https://researchgate.net/publication/337293313_RESURSY_I_OCENKA_ZAPASOV_PODZEMNYH_VOD
[14] Холикулов и др. (n.d.). Запасы подземных вод Узбекистана и их использование (на примере Чирчик-Ахангаранской долины). Retrieved from https://cyberleninka.ru/article/n/zapasy-podzemnyh-vod-uzbekistana-i-ih-ispolzovanie-na-primere-chirchik-ahangaranskoy-doliny/viewer